

# MÉTODO PARA REALIZAR UN ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD A PROYECTOS DE INVERSIÓN, ANTE CAMBIOS EN LA TASA DE INTERÉS

RAFAEL SAINZ <sup>(1)</sup>

JOSÉ MAGAÑA <sup>(2)</sup>

Recibido: 18-06-08 / Aceptado: 13-09-08

## RESUMEN

Los cambios en las tasas de interés del mercado provocan variaciones en los indicadores de rentabilidad, lo que implica que las decisiones financieras en proyectos de infraestructura se mantengan en un riesgo latente. La mayor o menor influencia de esas variaciones es lo que determina el riesgo. Originado por factores externos, las tasas de intereses pueden sufrir cambios que afectan los valores actualizados de los flujos de caja. En el análisis de sensibilidad se realiza la simulación para establecer el rango de valores en que la tasa puede cambiar, sin que por esto se pierda la factibilidad económica del proyecto. Lo tradicional es realizar corridas en el ordenador para cada cambio de tasa, lo que significa el empleo de una gran cantidad de tiempo. El modelo que aquí se presenta determina el Valor Presente Neto para cada valor de tasa de interés propuesta.

**Palabras clave:** Tasa de interés, capitalización, sensibilidad Valor Presente Neto

---

(1) *Rafael O. Sainz Zamora, Ingeniero. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnahuac 8532, Progreso, Mor., 62550, México. rsainz@tlaloc.imta.mx*

(2) *José D. Magaña Zamora, Ingeniero. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnahuac 8532, Progreso, Mor., 62550, México. jmagana@tlaloc.imta.mx*

## Method to make a sensitivity analysis to investment projects, in a situation of changes in the interest rate

### ABSTRACT

Changes over market interest rates, leads to variations over indicators of rent ability, what implies a steady risk over financial decisions in infrastructural projects. The most or less influence of these variation determines the risk. Created by external factors, interest rates can suffer changes affecting updated values in cash flow. In the analysis of sensitivity, the realization of a simulation to establish a range of values in which the rate can change, without loosing the economic feasibility of the project. The tradition is create several tries over the computer trying each change of rate, what it means a lot of time. The model presented here, determines the Net Present Value to each value of rate proposed.

**Key words:** Rate of Interest, capitalization, sensitivity, Net Present Value.

---

### EL RIESGO EN LOS PROYECTOS DE INVERSIÓN

Riesgo es la posibilidad de obtener un resultado desfavorable como resultado de la ocurrencia o exposición a un evento que bien puede provocarse, ser pronosticado o depender íntegramente del azar. Riesgo es el daño potencial que puede surgir por un proceso presente o evento futuro. Es posible plantear tres situaciones de riesgo, las cuales tienen que ver de una manera directa con el conocimiento o la información que se dispone, tal clasificación es:

**Lo cierto como conocido:** cada factor es conocido y cuantificado, su comportamiento en el tiempo esta bien identificado. (Determinístico)

**Incertidumbre medida:** las magnitudes obedecen a un comportamiento que presenta variantes, pero que se conoce en términos de su probabilidad de ocurrencia. (Probabilístico)

**Incertidumbre total:** los factores y magnitudes pueden cambiar con un comportamiento fuera de lo que pueden considerar las probabilidades. (Aleatorio).

Existen diversas técnicas o enfoques para considerar el efecto riesgo en proyectos de inversión, cabe aclarar que las técnicas no siempre contemplan los mismos elementos por lo que no siempre concluyen en los mismos resultados, la calidad y disponibilidad mínima requerida de la información se convierte en el factor determinante.

Un requerimiento en los proyectos de inversión es medir el riesgo que se corre cuando alguna de las magnitudes de los factores financieros del proyecto pueda tener variaciones. De igual manera el decisor deberá saber la sensibilidad del resultado ante las variaciones de esas magnitudes, como lo sería por ejemplo el cambio en el programa de inversiones o del flujo de caja, la tasa de interés también pudiese variar a lo largo de la vida útil del proyecto.

Mediante el análisis de la sensibilidad, es posible identificar las variaciones máximas permisibles de las magnitudes de factores que en nuestro caso serían la inversión inicial, los flujos de caja o bien la tasa de interés. Los cambios en los factores pueden modificar los resultados de decisión. Este análisis constituye una forma de introducir el riesgo en la selección de inversiones. Con el manejo de la sensibilidad, es posible establecer los intervalos de comportamiento aceptables para que un proyecto continúe siendo rentable.

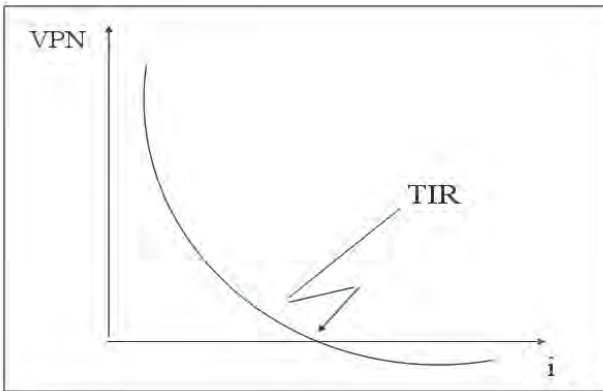
También se puede aplicar el análisis de sensibilidad para identificar las variables que tienen un mayor efecto sobre los resultados de la evaluación, esto en muchas ocasiones propicia el que se lleven a cabo estudios en mayor detalle, con lo cual se mejora la estimación de las variables y se reduce el riesgo propiciado por errores de estimación; además, da la pauta para establecer un mayor control y seguimiento del comportamiento de las variables a lo largo de la vida útil del proyecto. Ese análisis puede trabajar de manera individual por variable o por bloque cuando son varias las variables que presentan cambios. El primer caso, que es el que se trata en este trabajo, examina hasta donde es posible modificar el valor de la variable.

En el caso de una inversión productiva o financiera, para determinar su rentabilidad se calcula su Valor Presente Neto (VPN) determinado con el modelo general por el valor actualizado de los flujos de caja ( $X_i$ ), descontados al tipo de interés ( $i$ ) en ( $N$ ) periodos de capitalización:

$$VPN = X_1 \left[ \frac{1}{(1+i)} \right] + X_2 \left[ \frac{1}{(1+i)^2} \right] + X_3 \left[ \frac{1}{(1+i)^3} \right] + \dots + X_{(n-1)} \left[ \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + X_N \left[ \frac{1}{(1+i)^N} \right] \quad (1)$$

Los cambios en la tasa de interés ( $i$ ), ocasionarán variaciones en el VPN. El gráfico 1, presenta, el resultado del análisis de sensibilidad, donde es posible ver como al incrementar la tasa de interés, los valores del VPN, se van reduciendo, hasta llegar al punto en que iguala su valor a cero y deja de ser rentable, ya que, posteriormente se presentan valores negativos, lo que significa que los costos actualizados son superiores a los beneficios que, por supuesto están actualizados.

Gráfico 1. Variación del VPN con la tasa de interés  $i$



Para contar con una medida que estime el efecto que produce un cambio en la tasa de interés sobre el VPN, se determinará la medida de dispersión, la cual se calcula por medio de la derivada de VPN con respecto a ( $i$ ), para aplicarla de forma comparativa, la cual se expresa en términos proporcionales con respecto a VPN, lo que da como resultado:

$$\frac{1}{VPN} \frac{d(IPN)}{di} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{tX_t}{(1+i)^t}}{(1+i)^t} \quad (2)$$

Expresión conocida como *duracion modificada* ( $D^*$ ), que por la forma de calcularla explica que sea considerada como una buena medida de sensibilidad y, por tanto de riesgo.

Para determinar esta medida, se hace uso de la media de los distintos flujos de dinero ponderados por los distintos plazos o vencimientos en los que la operación financiera generará esos flujos monetarios, esta medida es llamada *duración o dispersión* ( $D$ ), y se expresa como:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{tX_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{X_t}{(1+i)^t}} = \frac{1}{VPN} \sum_{t=1}^n \frac{tX_t}{(1+i)^t} \quad (3)$$

donde:

t: periodo en que se produce el flujo; n: horizonte de planeación;  $X_i$ : flujo de efectivo en el período i.

La *duración o dispersión* se puede interpretar como un promedio de años (valor en años), que indica en que año deberá hacerse el pago si es que se quisiera sustituir todos los flujos de la transacción por un flujo equivalente. Como se puede observar de la expresión matemática anterior, la dispersión modificada mide lo mismo que la derivada de VPN respecto de (i), así la relación que permite calcular la variación porcentual que experimenta un valor del indicador de rentabilidad ante variaciones de un punto porcentual de la tasa de interés, sería:

$$D^* = \frac{D}{(1+i)} \quad (4)$$

Por ejemplo, en la tabla 1, se muestran los periodos de capitalización (t) y los ingresos y egresos que se presentan en cada año ( $X_i$ ), este flujo se actualiza por medio del factor de actualización F para una tasa del 12% anual

Tabla 1. Calculo del VPN para una tasa de 12%

t	X	F factor act 12%	VPN
1	25.50	0.8929	22.7679
2	26.00	0.7972	20.7270
3	27.00	0.7118	19.2181
4	29.00	0.6355	18.4300
5	33.00	0.5674	18.7251
6	35.00	0.5066	17.7321
7	40.00	0.4523	18.0940
8	42.00	0.4039	16.9631
9	45.00	0.3606	16.2275
10	44.00	0.3220	14.1668

SUMA: 183.05

Se calcula el denominador de la fórmula al multiplicar los periodos de capitalización ( $t$ ) con el flujo que se presenta en cada año ( $X_i$ ), el producto se actualiza al ser multiplicado por el factor de la tasa de interés, tal y como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Calculo del numerador de la ecuación 3

t	$X_i$	$t(X_i)$	F. Actualización 12.0%	$t(VPN)$
1	25.50	25.50	0.8929	22.77
2	26.00	52.00	0.7972	41.45
3	27.00	81.00	0.7118	57.65
4	29.00	116.00	0.6355	73.72
5	33.00	165.00	0.5674	93.63
6	35.00	210.00	0.5066	106.39
7	40.00	280.00	0.4523	126.66
8	42.00	336.00	0.4039	135.70
9	45.00	405.00	0.3606	46.05
10	44.00	440.00	0.3220	41.67

**SUMA: 945.69**

Por medio del modelo, que a continuación se presenta, se calcula el  $VPN(i)$  ajustado.

$$VPN(i) = VPN_b \pm N \left[ \frac{D^*}{100} \right] VPN_b \quad (5)$$

Al aplicar el modelo (3) de dispersión se tiene que:

$$D = \frac{1}{VPN} \sum_{i=1}^n \frac{tX_i}{(1+i)^t} = \frac{945.69}{183.05} = 5.16$$

Mientras que la duración representa que vida promedio de esta inversión es de 5.16 años, la dispersión modificada (4) queda determinada de esta manera;

$$D^* = \frac{D}{(1+i)} = \frac{5.16}{(1+0.12)} = 4.61$$

Lo anterior indica que la variación porcentual en el VPN por cada variación de un punto porcentual es de 4.61%. Para su aplicación, se considera que la duración es siempre positiva, pero cuando se utiliza como medida de sensibilidad, debe interpretarse en sentido negativo, es decir, el valor de la variación del VPN debe ir en sentido contrario al de la tasa de interés. A continuación se presenta un ejemplo. Al aplicar la fórmula general para calcular el VPN a distintos intereses, lo cual se presenta en la tabla 3.

Tabla 3. VPN para diferentes tasas de interés

Tasa de interés	VPN
11 %	191.49
12 %	183.05
13 %	174.61

Desde la posición del VPN calculado al interés del 12%, si la tasa de interés varía positivamente en 1%, es decir, cuando se pasa del 12% al 13%, el efecto sobre el valor presente del flujo se determina utilizando el modelo (5), de la siguiente manera:

$$VPN = 183.05 - 183.05 (0.0461) = 174.61$$

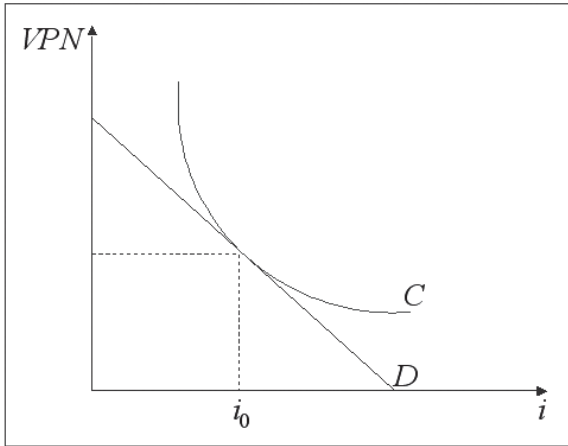
En el caso opuesto, Si la tasa de interés se viese disminuida en 1%, pasando del 12% al 11%, el efecto sobre el valor presente del flujo sería de esta manera;

$$VPN = 183.05 + 183.05 (0.0461) = 191.48$$

## ERROR EN LA DURACIÓN MODIFICADA

Como la dispersión modificada es en realidad una derivada, en general su aplicación sólo es valida para pequeñas variaciones en la tasa de interés. Para determinar rangos o medidas en las cuales el criterio de la duración se modifica al realizar análisis de sensibilidad es útil representar geoméricamente al valor presente neto en función de la tasa de interés. A partir del gráfico 2, que se muestra a continuación, se puede observar que, para un valor de la tasa de interés  $i_0$  la pendiente a la curva en ese punto es la dispersión modificada.

Gráfico 2. La diferencia entre las curvas D y C es el error en que se incurre al estimar el VPN en cualquier  $i$ , usando la duración modificada en  $i_0$ .



Por inspección de la gráfica, se nota que este error estaría dado por la diferencia entre los valores de la pendiente de la recta D y de la pendiente de la curva C. Para demostrar la presencia del error, en la tabla 3, se muestra el resultado del cálculo directo del VPN y de la aplicación con la dispersión modificada.

Tabla 3. Muestra el cálculo del VPN directo y con la dispersión modificada

Tasa de interés	15%	14%	13%	12%	11%	10%	9%
VPN	160.40	167.27	174.89	183.05	191.80	201.18	211.25
VPN (con D)	157.72	166.16	174.61	183.05	191.49	199.93	208.38
Error	2.68	1.11	0.28	0.00	0.31	1.24	2.87

Como se puede apreciar, conforme se alejan los valores de la tasa de interés base, el error del VPN se ve incrementado.

Con una segunda derivada del VPN con respecto a la tasa de interés, se mide la forma de la curva (convexidad de la curva), la cual se determina el error  $D^{**}$  que se origina al extender el criterio de la dispersión modificada de una tasa de interés a otra. Siguiendo este supuesto, se calcula el error de esta manera;



$$\frac{d^2VPN}{di^2} = \frac{d}{di} \left[ \sum_{t=1}^n X_t(-t)(1+i)^{-t-1} \right] \quad (6)$$

$$\frac{d^2VPN}{di^2} = \sum_{t=1}^n X_t(-t) \frac{d}{di} (1+i)^{-t-1} \quad (7)$$

Como en el caso de la primera derivada respecto a la deducción de la dispersión modificada, con fines de utilizar esta segunda derivada comparativamente, se debe expresar en términos proporcionales con respecto a VPN, pero al cuadrado.

$$D^{**} = \frac{d^2VPN}{di^2} = \frac{\sum_{t=1}^n t(1+i) \left( \frac{X_t}{(1+i)^t} \right)}{(1+i)^2} \quad (8)$$

Entonces la forma de calcular el VPN haciendo uso del error expresado por la segunda derivada (ecuación 8), es

$$VPN_b = VPN(i) \left[ 1 + N(D_1^{**} + D_2^{**} + \dots + D_N^{**}) \right] \quad (9)$$

En este caso  $N$  es el número de puntos de diferencia entre la tasa base y la que calculará el nuevo VPN.

A continuación se calcula el error  $D^{**}$  de la dispersión modificada para las tasas de interés del 9 y del 14%. Considerando la dispersión modificada  $D^* = 4.612734$ .

Para una tasa del 9 %, se tiene que:

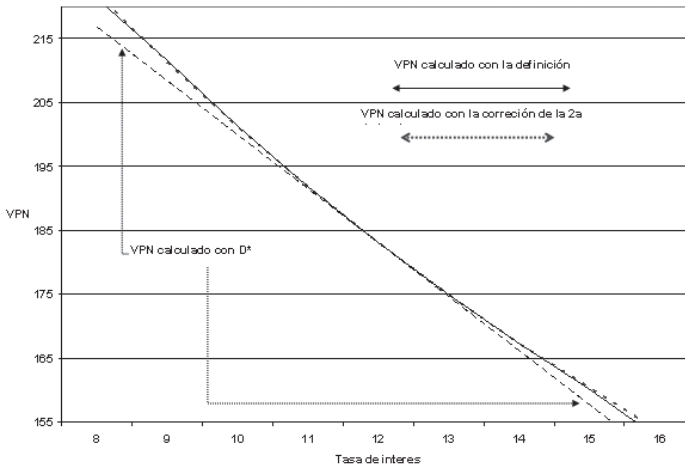
$$VPN_{9\%} = 208.38 [1 + 3(0.0017 + 0.0017 + 0.0017)] = 211.57$$

Para una tasa del 14%, se tiene que:

$$VPN_{14\%} = 167.27 [1 + 2(0.0017 + 0.0017)] = 167.29$$

En el gráfico 3, se muestra el comportamiento del modelo y el ajuste que este tiene con la curva de actualización del valor presente.

Gráfico 3. Comparación del valor de VPN calculado con  $D^*$  y la corrección de la segunda derivada



## CONCLUSIONES

Como ha quedado demostrado, la aplicación de esta técnica, permite simplificar el análisis tradicional de sensibilidad, logrando una mayor facilidad en el cálculo y tiempo empleado, por otra parte se dispone de información del comportamiento potencial de VPN en condiciones de que las tasas de interés tengan cambios en cuanto a sus valores.

## Bibliografía

- Aftalion y Poncet; 1985, *Las Tasas de Interés*. Fondo de Cultura Económica. México.
- Böhm Bawerk, 1959, *Capital and Interest*, Libertarian Press, London.
- Caballero Gómez, Rodríguez y Torruco, 1999, *Matemáticas Financieras Aplicadas* Ed. A.C. Madrid.
- Fetter, Walecka y Quantum, 1971, *Theory of Many-Particle Systems*, McGraw Hill, Boston.
- Levenfeld G., 1997, *Matemática de las Operaciones Financieras y de la Inversión*. Mc-Graw Hill. Madrid.
- Ludwig von Mises, 1982, *Teoría del dinero y del crédito*, Ed. Aguilar, Madrid.
- Shackle, 1990, *Epistémica y Economía. Crítica de las doctrinas económicas*. Ed. F.C.E.
- Suárez, 1990, *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*, Pirámide, Madrid.
- Taquechel, 2001, *Algunas ideas clave para la gestión de proyectos internacionales en las universidades cubanas*, Ed. Félix Varela, La Habana.
- Spivak, Michel; *Calculus*. Madrid. Reverte.1982
- Vázquez; *Curso de Matemática Financiera*. Ed. Pirámide. Madrid. 1993
- Villalobos, José Luis; *Matemáticas Financieras.*, Editorial Iberoamericana, México, 1996.